ядра бинарных отношений.

1. Заданы векторные оценки для стратегий, оптимальных по Парето $y^1=(7,5,4)$, $y^2=(4,6,4)$, $y^3=(5,6,3)$, $y^4=(4,7,5)$

а) известно, что все критерии равноценны. Найти $C(\{y^i\},R)$.

$$C(\{y^i\},R)=\{y^1,y^4\}. \quad \theta(y^1)=\theta(y^4)=(7,5,4).$$

б) известно, что первый критерий важнее второго.

Тогда $y^1 T_{12} (5,7,4) P y^2$, $y^1 T_{12} (5,7,4) P y^3$.

$$C(\{y^i\},R)=\{y^1,y^4\}$$

в) известно, что первый критерий важнее второго, а второй равноценен третьему.

Тогда $y^1 S_{23} (7,4,5) T_{12} y^4 \Rightarrow C(\{y^i\},R)=\{y^1\}$.

2. Пусть бинарное отношение R на множестве $X=\{1,\dots,n\}$ задано матрицей

$A=(a_{ij})_{n\times n}$,

где $a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если } iRj,\\ 0, & \text{если } i\bar{R}j.\end{cases}$

Определим

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

Найти $C(X,R)$.

$C(X,R)=\{2,3,4\}$.

Смотрим первый столбец, где $2R1$, $3R1$, $4R1$.

$4R1\bar{R}4 \Rightarrow 1\notin C(X,R)$

Второй столбец $1R2$, $4R2$. Здесь $1R2R1$, $4R2R4$.

$\Rightarrow 2\in C(X,R)$

Третий столбец $1R3$, $4R3$. $1R3R1$, $4R3R4 \Rightarrow 3\in C(X,R)$

Четвертый столбец $2R4R2$, $3R4R3 \Rightarrow 4\in C(X,R)$

Производная по направлению функции минимума.

$$F(x_1, \underbrace{x_2, x_3}, y) = (x_1 - y)^2 + (x_2 - y)^2 + (x_3 - y)^2 \qquad y \in N = [0, 1].$$

производная по направлению $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

функции $W(x) = \min\limits_{y \in N} F(x_1, x_2, x_3, y)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$.

F строго выпукла по y. Поэтому

$$N(x) = \{y(x)\}, \qquad y(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, & 0 \le x_1 + x_2 + x_3 \le 3, \\ 1, & x_1 + x_2 + x_3 > 3, \\ 0, & x_1 + x_2 + x_3 < 0 \end{cases}$$

$$\frac{dW(x)}{d\alpha} = (\alpha, F'_x(x, y(x))) = 2 \sum_{i=1}^{3} \alpha_i (x_i - y(x)).$$

Разные задачи. 1) $x^0 = (3, 2, -1)$ $\alpha = (1, 1, 1)$

найти $\dfrac{dW(x^0)}{d\alpha}$

б). При каких x $\frac{dW(x)}{d\alpha}=0$ для всех направлений α?

Если $0 \le x_1+x_2+x_3 \le 3$, то $y(x)=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$

$$\frac{dW(x)}{d\alpha}=2\{\alpha_1(x_1-y(x))+\alpha_2(x_2-y(x))+\alpha_3(x_3-y(x))\}=0$$

для всех α, если $x_i-y(x)=0$, $i=1,2,3$

$\Rightarrow x_1=x_2=x_3$.

Если $x_1+x_2+x_3>3$, то при $\alpha=(1,1,1)$

$\frac{dW(x)}{d\alpha}>0$

Если $x_1+x_2+x_3<0$, то при $\alpha=(1,1,1)$

$\frac{dW(x)}{d\alpha}<0$.